Funkcje analityczne*

Piotr Nayar, kolokwium I
17.12.2022, 10:00–15:00

Zasady: Trzeba wybrać 5 zadań i zaznaczyć, że mają one liczyć się do wyniku z kolokwium. Pozostałe zadania też można rozwiązać. Za każde takie zadanie doliczę 5 punktów do wyniku z prac domowych.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+4} \, \mathrm{d}x \; .$$

Zadanie 2. Skonstruuj (zadaj konkretnym wzorem) funkcję holomorficzną $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, dla której $f(\mathbb{D}) = \mathbb{P}$, gdzie $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ jest dyskiem jednostkowym oraz

$$\mathbb{P} = \left\{ |z| < 1, \;\; z \neq 0, \;\; \mathrm{Arg}(z) \notin [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \right\}.$$

Uwaga. Funkcję f można zadać jako złożenie konkretnych przekształceń (nie trzeba wówczas tego złożenia obliczać).

Zadanie 3. Dana jest holomorficzna bijekcja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}$ spełniająca $f(0) = 0$, gdzie $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ jest dyskiem jednostkowym oraz $\mathbb{S} = \{|\mathrm{Im}\, z|, |\mathrm{Re}\, z| < 1\}$ jest kwadratem. Udowodnij, że dla $|z| < 1$ prawdziwa jest równość $f(iz) = if(z)$.

Zadanie 4. Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia n i niech $M = \max_{|s| \leq 1} |P(s)|$. Udowodnij, że dla $|z| \geq 1$ prawdziwa jest nierówność $|P(z)| \leq M|z|^n$.

Zadanie 5. Niech $f : \{|z| \leq 1\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ będzie ciągła i meromorficzna na $\{|z| < 1\}$. Załóżmy, że $|f(z)| = 1$ dla $|z| = 1$. Wykaż, że f jest funkcją wymierną.

Zadanie 6. Niech $c, d > 0$ będą liczbami całkowitymi i niech

$$P(z) = z^{-c} + a_{-c+1} z^{-c+1} + \ldots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ dla $i \in \{-c+1, \ldots, d-1\}$. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje $M_\varepsilon > 0$ takie, że dla wszystkich zespolonych liczb τ spełniających $|\tau| \geq M_\varepsilon$ równanie $P(z) = \tau$ ma dokładnie $d + c$ parami różnych rozwiązań, przy czym c z nich jest zawartych w zbiorze $\{|z| < \varepsilon\}$ oraz d w zbiorze $\{|z| > \varepsilon^{-1}\}$.

Zadanie 7. Załóżmy, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n \geq 0,$$

ma promień zbieżności 1. Wykaż, że nie istnieje $\varepsilon > 0$ o następującej własności: istnieje funkcja holomorficzna $F : \{|z| < 1\} \cup \{|z-1| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ taka, że $F|_{\{|z|<1\}} = f$.